М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.929
DOI 10.21685/2072-3040-2019-2-1

И. В. Бойков

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ. ЧАСТЬ. III. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа посвящена анализу устойчивости в смысле Ляпунова установившихся решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с коэффициентами и с запаздываниям, зависящими от времени. Рассматриваются случаи непрерывного и импульсного возмущения.

Материалы и методы. Исследование основано на использовании связи между устойчивостью исходных систем нелинейных дифференциальных уравнений и устойчивостью специальным образом построенных систем линейных дифференциальных уравнений. При анализе построенных таким образом систем линейных дифференциальных уравнений используются свойства логарифмических норм.

Результаты. Предложены алгоритмы, позволяющие получать достаточные условия устойчивости решений конечных систем нелинейных дифференциальных уравнений с коэффициентами и с запаздываниями, зависящими от времени. Достаточные условия представлены в виде неравенств, связывающих коэффициенты линеаризованных систем уравнений. Алгоритмы эффективны как в случае непрерывных, так и в случае импульсных возмущений.

Выводы. Предложенный метод может быть использован при исследовании нестационарных динамических систем, описываемых системами обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени.

Ключевые слова: устойчивость, нелинейные системы, обыкновенные дифференциальные уравнения, запаздывания, зависящие от времени.

I. V. Boykov

SUFFICIENT CONDITIONS FOR SUSTAINABILITY OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME DELAY. PART III. NONLINEAR EQUATIONS

Abstract.

Background. The paper is devoted to the analysis of stability in the sense of Lyapunov steady-state solutions of systems of nonlinear differential equations with coefficients and with time delays. The cases of continuous and impulsive perturbations are considered.

Materials and methods. The study is based on the use of the relationship between the stability of the initial systems of nonlinear differential equations and the stability of specially constructed systems of linear differential equations. When analyzing systems of linear differential equations constructed this way, the properties of logarithmic norms are used.

Results. Algorithms are proposed that allow one to obtain sufficient conditions for the stability of solutions of finite systems of nonlinear differential equations with coefficients and with time delays. Sufficient conditions are presented in the form of inequalities connecting the coefficients of linearized systems of equations. The algorithms are effective both in the case of continuous and in the case of impulsive perturbations.

Conclusions. The proposed method can be used in the study of nonstationary dynamic systems described by systems of ordinary linear differential equations with time delays.

Keywords: stability, nonlinear systems, ordinary differential equations, time delays.

Введение

Данная статья является продолжением статей [1–3].

В работе [1] исследовалась устойчивость решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1(t - h_{k1}(t)), \dots, x_n(t - h_{kn}(t))), \tag{1}$$

$k = 1, 2, \dots, n,$ $t \ge t_0$, с начальным множеством $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t_0 - H \le t \le t_0$, где $x(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - H \le t \le t_0$ – непрерывная вектор-функция; $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ – искомое решение. Подобное решение обозначим через $x_\varphi(t)$.

В работе [1] получены достаточные условия устойчивости решения системы уравнений (1) в метрике пространства R_n^3 векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой $\| x \|_3 = \max\limits_{1 \le k \le n} | x_k |$. Достаточные условия устойчивости были выражены через логарифмические нормы семейств матриц, построенных на частных производных первого порядка функций f_k.

Соответствующие логарифмические нормы были ассоциированы с метрикой пространства R_n^3. Логарифмическая норма матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n,$ в пространстве R_n^3 с нормой $\| x \|_3 = \max\limits_{1 \le k \le n} | x_k |$ определяется формулой [4, 5]:

$$\Lambda(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \ne i}^{n} | a_{ij} | \right).$$

При получении достаточных условий устойчивости решений систем уравнений вида (1) в работе [1] существенно использовались свойства упомянутой выше метрики пространства R_n^3.

Кроме того, на функции $h_{ij}(t)$ были наложены условия:

1) уравнения $t - h_{ij}(t) = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, имеют только одно решение t_{ij}^*;

2) $t > h_{ij}(t)$ при $t > t_{ij}^*$.

Представляет значительный интерес получение достаточных условий устойчивости решений систем неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени, справедливых в любых n-мерных пространствах, на основе методологии, свободной от использования свойств метрики конкретного пространства и от выполнения вышеупомянутых условий.

В первую очередь представляет интерес построение достаточных условий устойчивости решений систем уравнений в n-мерных пространствах R_n^j, $j = 1, 2, 3$, векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ соответственно с нормами

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \ \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2}, \ \|x\|_3 = \max_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

В работе [2] получены достаточные условия устойчивости решений систем уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) x_j(t - h(t)), \ i = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

в n-мерных пространствах $R_n^j, j = 1, 2, 3$, векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Здесь $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, ..., n$, – непрерывные функции; $h(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $0 \le h(t) \le H^* + t$ при $0 \le t < \infty$. Здесь и ниже полагаем $t_0 = 0$.

В работе [3] получены достаточные условия устойчивости решений систем уравнений вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) x_j(t - h_i(t)), \ i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

в n-мерном пространстве R_n^2 векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

В данной работе результаты, полученные в статьях [1–3], распространяются на нелинейные уравнения.

Приведем определения, используемые в статье.

Через $D^k g(t, u_1, .., u_n)$ обозначена частная производная $D^k g(t, u_1, ..., u_n) = \partial g(t, u_1, ..., u_n) / \partial u_k$, $k = 1, 2. \ldots, n$.

Пусть $X -$ банахово пространство; $K -$ оператор, действующий из X в X; $B(a,r) = \{x, a \in X : \| x - a \| \le r\}$; $S(a,r) = \{x, a \in X : \| x - a \| = r\}$; $\Lambda(K) -$ логарифмическая норма линейного оператора K, определяемая [4] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\| I + hK \| - 1) / h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, в n-мерном пространстве R_n^j, $j = 1,2,3$, векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} | x_k |,\ \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} | x_k |^2 \right]^{1/2},\ \|x\|_3 = \max_{1 \le k \le n} | x_k |.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [5]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i=1, i \ne j}^{n} | a_{ij} | \right),\ \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \ne i}^{n} | a_{ij} | \right).$$

Здесь $\lambda_{\max}((A + A^T)/2) -$ наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^T)/2$; символ $\Lambda_j(A(t))$, $j = 1,2,3$, означает логарифмическую норму в прстранстве R_n^j соответственно,

Предварительно приведем, следуя [1, 6], достаточные условия устойчивости систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений в метрике пространства R_n^3.

Рассмотрим систему нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)), i = 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

где функции $a_i(t, u_1, ..., u_n)$ непрерывны по первой переменной и имеют частные производные по остальным переменным, удовлетворяющие условию Липшица с коэффициентом A:

$$\left| D^j a_i(t, x_1^*, ..., x_n^*) - D^j a_i(t, y_1^*, ..., y_n^*) \right| \le$$

$$\le A(| x_1^* - y_1^* | + ... + | x_n^* - y_n^* |),\quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Пусть система (4) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))$ при $t \ge 0$.

Исследуем устойчивость установившегося решения $x^*(t)$ при возмущении

$$x_i(0) = x_i^0, i = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть система уравнений (4) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))$. Пусть функции $a_i(t, x_1, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, непрерывны по первой переменной, непрерывно-дифференцируемы по остальным переменным и частные производные удовлетворяют условию Липшица (5). Пусть при всех $t \geq 0$ выполнены условия

$$D^i a_i(t, x_1^*(t), ..., x_n^*(t)) + \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \left| D^j a_i(t, x_1^*(t), ..., x_n^*(t)) \right| \leq -\chi < 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \chi = \text{const}.$$

Тогда установившееся решение $x^*(t)$ системы уравнений (4) асимптотически устойчиво в метрике пространства R_n^3.

Для дальнейшего исследования понадобятся аналоги этой теоремы в других метриках.

По аналогии с доказательством теоремы 1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть система уравнений (4) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))$. Пусть функции $a_i(t, x_1, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, непрерывны по первой переменной, непрерывно-дифференцируемы по остальным переменным и их частные производные удовлетворяют условию Липшица (5). Пусть при всех $t \geq 0$ выполнены условия

$$\Lambda_j(A(t)) \leq -\chi < 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \chi = \text{const}.$$

Тогда установившееся решение $x^*(t)$ системы уравнений (4) асимптотически устойчиво в метрике пространства R_n^j, $j = 1, 2, 3$.

Здесь $A(t)$ – матрица с элементами $a_{ij}(t) = D^j a_i(t, x_1^*(t), ..., x_n^*(t))$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Замечание. Теорема 2 доказывается по аналогии с доказательством теоремы 1 (см. разд. 3 работы [1]. Отличие заключается в оценке $\| G(s, T, x^*(s), u(s)) \|$ в различных метриках.

Приведем эти оценки.

В работе [1] показано, что устойчивость установившегося решения $x^*(t)$ при $t \geq T$ связана с устойчивостью системы уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} = A(T)u(t) + G^*(t, T, x^*(t), u(t)), \tag{7}$$

где $A(T)=\{a_{ij}(T)\}$, $a_{ij}(T)=D^j a_i(T,x_1^*(T),\dots,x_n^*(T))$, $i,j=1,2,\dots,n$;

$$u(t)=(u_1(t),\dots,u_n(t));$$

$$G^*(t,T,x^*(t),u(t))=\left(g_1^*(t,T,x^*(t),u(t)),\dots,g_n^*(t,T,x^*(t),u(t))\right)^T.$$

Здесь

$$g_i^*(t,T,x^*(t),u(t))=g_i(t,T,x^*(t),u(t))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big(D^j a_i\Big(T,x_1^*(T),\dots,x_{j-1}^*(T),x_j^*(T)+Q_j u_J(t)\Big),$$

$$x_{j+1}^*(T)+u_{j+1}(t),\dots,x_n^*(T)+u_n(t))-$$

$$-D^j a_i\Big(T,x_1^*(T),\dots,x_{j-1}^*(T),x_j^*(T),x_{j+1}^*(T),\dots,x_n^*(T)\Big)\Big)u_j(t),$$

$$i=1,2,\dots,n,\ \ 0<Q_j<1,\ \ j=1,2,\dots,n;$$

$$g_i(t,T,x^*(t),u(t))=\Big(a_i(t,x_1^*(t)+u_1(t),\dots,x_n^*(t)+u_n(t))-$$

$$-a_i(T,x_1^*(T)+u_1(t),\dots,x_n^*(T)+u_1(t))\Big)-\Big(a_i(t,x^*(t),\dots,x_n^*(t))-$$

$$-a_i(T,x_1^*(T),\dots,x_n^*(T))\Big),\ \ i=1,\dots,n.$$

Требуется показать, что при $t\ge T$ $\|u(t)\|_j\le\|u(T)\|_j$, $j=1,2,3.$ В метрике пространства R_n^3 это неравенство доказано в работе [1]. Требуется доказать его справедливость в пространствах R_n^1, R_n^2.

Уравнение (7) при $t\ge T$ имеет решение

$$u(t)=e^{A(T)(t-T)}u(t)+\int_T^t e^{A(T)(t-s)}G^*(s,T,x^*(s),u(s))ds. \tag{8}$$

Переходя к нормам в пространствах R_n^j, $j=1,2,$ имеем

$$\|u(t)\|_j\le e^{\Lambda_j(A(T))(t-T)}\|u(T)\|_j+$$

$$+\int_T^t e^{\Lambda_j(A(T))(t-s)}\|G^*(s,T,x^*(s),u(s))\|_j\,ds,\ \ j=1,2. \tag{9}$$

Нужно показать, что для как угодно малого ε такого, что $\Lambda_j(A(T))+\varepsilon\le-\chi$, $\chi>0$, найдется промежуток времени $t\in[T,T+\Delta T]$, в течение которого

$$\| G^*(t,T,x^*(t),u(t)) \|_j \le \varepsilon \| u(t) \|_j, \quad j = 1,2.$$

Докажем справедливость этого неравенства при $j = 1,2.$

Пусть $j = 1$, тогда

$$\| G^*(t,T,x^*(t),u(t)) \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | g_i(t,T,x^*(t),u(t)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big(D^j a_i(T,x^*(T),\dots,x^*_{j-1}(T),x^*_j(T)+$$

$$+Q_j u_j(t), x^*_{j+1}(T)+u_{j+1}(t),\dots,x^*_n(T)+u_n(t)) -$$

$$-D^j a_i(T,x^*_1(T),\dots,x^*_{j-1}(T),x^*_j(T),x^*_{j+1}(T),\dots,x^*_n(T))\Big) u_j(t) | \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} | g_i(t,T,x^*(t),u(t)) | + \left| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(D^j a_i(T,x^*(T),\dots,x^*_{j-1}(T),x^*_j(T)+\right.$$

$$+Q_j u_j(t), x^*_{j+1}(T)+u_{j+1}(t),\dots,x^*_n(T)+u_n(t)) -$$

$$\left. -D^j a_i(T,x^*_1(T),\dots,x^*_{j-1}(T),\ x^*_j(T),x^*_{j+1}(T),\dots,x^*_n(T))\Big) u_j(t) \right| = I_1 + I_2.$$

Из построения функций $g_i(t,T,x^*(t),u(t))$ и предположения, что $\| u(T) \|_1 = \delta,$ следует, что для $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2$ найдется интервал $[T, T + \Delta_1 T]$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i(t,T,x^*(t),u(t)) | \le \varepsilon_1 \| u(t) \|_1.$$

Оценим выражение I_2. Используя неравенство (5), имеем

$$I_2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} | D^j a_i(T,x^*_1(T),\dots,x^*_{j-1}(T),x^*_j(T+Q_j,u_j(t)),x^*_{j+1}(T+u_{j+1}(t)),\dots,$$

$$x^*_n(T+u_n(t)) - D^j a_i(T,x^*_1(T),\dots,x^*_{j-1}(T),x^*_j(T),x^*_{j+1}(T),\dots,x^*_n(T)) \| u_j(t) | \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} An(| u_j(t) | + \dots + | u_n(t) |) | u_j(t) | \le$$

$$\le An \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} | u_i(t) |) | u_j(t) | \le An \| u(t) \|_1^2 .$$

Отсюда следует, что существует промежуток времени $[T, T+\Delta_2 T]$, $\Delta_2 T \le \Delta_1 T$, такой, что $\| u(t) \|_1 \le (1+\varepsilon_2) \| u(T) \|_1 = (1+\varepsilon_2)\delta$. Следовательно, при $t \in [T, T+\Delta_2 T]$

$$I_2 \le An(1+\varepsilon_2)\delta \| u(t) \|_1 .$$

Полагая δ таким, что $An(1+\varepsilon_2)\delta \le \varepsilon_1 = \chi/2$, имеем

$$I_2 \le \varepsilon_1 \| u(t) \|_1 = \chi \| u(t) \|_1 / 2.$$

Подставляя эти значения в неравенство (9), имеем

$$\| u(t) \|_1 \le e^{\Lambda_1(A(T))(t-T)} \| u(T) \|_1 + \frac{1}{2}\chi \int_T^t e^{\Lambda_1(A(T))(t-s)} \| u(s) \|_1 \, ds.$$

Отсюда стандартными рассуждениями убеждаемся в справедливости теоремы 2 в метрике пространства R_n^1.

Пусть $j=2$. Применяя неравенство Минковского, имеем

$$I_2 \le \| G(t,T,x^*(t),u(t)) \|_2 + \left[\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n \Big(D^j a_i(T, x^*(T), \ldots, x_{j-1}^*(T), x_j^*(T) + \right.\right.$$

$$+ Q_j u_j(t), x_{j+1}^*(T) + u_{j+1}(t), \ldots, x_n^*(T) + u_n(t)) -$$

$$\left.\left. - D^j a_i(T, x_1^*(T), \ldots, x_{j-1}^*(T), x_j^*(T), x_{j+1}^*(T), \ldots, x_n^*(T)) \Big) u_j(t) \right|^2 \right]^{1/2} = I_{21} + I_{22}.$$

Нетрудно видеть, что для любого как угодно малого $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ найдется такой промежуток времени $[T, T+\Delta T]$, в течение которого

$$I_{21} \le \varepsilon \| u(t) \|_2 /2.$$

Приступим к оценке I_{22}. Очевидно,

$$I_{22}^2 \le \sum_{i=1}^n | \sum_{j=1}^n \Big(D^j a_i(T, x^*(T), \ldots, x_{j-1}^*(T), x_j^*(T) + Q_j u_j(t), x_{j+1}^*(T) + u_{j+1}(t), \ldots,$$

$$x_n^*(T) + u_n(t)) - D^j a_i(T, x_1^*(T), \ldots, x_{j-1}^*(T), x_j^*(T), x_{j+1}^*(T), \ldots, x_n^*(T)) \Big) \times$$

$$\times u_j(t) |^2 \sum_{j=1}^n | u_j(t) |^2 = \| u(t) \|_2^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \Big| \Big(D^j a_i(T, x^*(T), \ldots, x_{j-1}^*(T), x_j^*(T) +$$

$$+ Q_j u_j(t), x_{j+1}^*(T) + u_{j+1}(t), \ldots, x_n^*(T) + u_n(t)) -$$

$$- D^j a_i(T, x_1^*(T), \ldots, x_{j-1}^*(T), x_j^*(T), x_{j+1}^*(T), \ldots, x_n^*(T)) \Big) \Big|^2 \le$$

$$\le \| u(t) \|_2^2 \sum_{j=1}^{n} | An \sum_{i=1}^{n} | u_i(t) \|^2 \le A^2 \| u(t) \|_2^2 n^3 \| u(t) \|_2^2 .$$

Так как по предложению $\| u(T) \|_2 = \delta,$ то существует такой интервал $[T, T + \Delta T],$ $\Delta_1 T < \Delta T$, в котором

$$\| u(t) \|_2 \le (1 + \varepsilon_1) \| u(T) \|_2 = (1 + \varepsilon_1)\delta.$$

Так как δ определяет норму начального возмущения, то можно выбрать δ таким образом, чтобы $A\sqrt{n^3}(1 + \varepsilon_1)\delta < \chi / 2.$

Тогда

$$I_{22} \le \frac{1}{2} \chi \| u(t) \|_2,$$

и, следовательно,

$$I_2 \le \frac{1}{2} \chi \| u(t) \|_2 .$$

В результате имеем при $t \in [T, T + \Delta_1 T]$ неравенство

$$\| u(t) \|_2 \le e^{\Lambda_2(A(T))(t-T)} \| u(T) \|_2 + \frac{1}{2} \chi \int_T^t e^{\Lambda_2(A(T))(t-s)} \| u(s) \|_2 \, ds, \qquad (10)$$

из которого стандартным способом завершается доказательство теоремы.

2. Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями, зависящими от времени

Рассмотрим систему нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + b_i\left(t, x_1(t - h(t)), ..., x_n(t - h(t))\right), \ i = 1, 2, ..., n, \quad (11)$$

где функции $a_i(t, x_1, \ldots, x_n), b_i(t, x_1, \ldots, x_n), i = 1, 2, ..., n,$ непрерывны по первой переменной и имеют частные производные по остальным переменным, удовлетворяющим условию Липшица (5); $h(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям: $0 \le h_* \le h(t) \le H^* + t$ при $0 \le t < \infty.$

Пусть при $-H^* \le t \le 0$ заданы начальные условия

$$x_i(t) = \eta_i(t), \ i = 1, 2, ..., n, \qquad (12)$$

где $\eta_i(t),$ $i = 1, 2, ..., n,$ – непрерывные функции.

Будем считать, что задача (11), (12) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t)),$ которое в момент времени $t_0 = 0$ получает возмущение $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n).$ Тогда

$$x_i(t_0) = x_i^*(t_0) + x_0^i,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{13}$$

Исследуем устойчивость решения системы уравнений (11) при условиях (12) и (13). Вначале рассмотрим случай, когда на функцию $h(t)$ налагается дополнительное условие $h(t) \neq t$ при всех значениях $t, 0 < t < \infty,$ за исключением одной точки, которую обозначим как t^*.

Здесь нужно рассмотреть два случая:

1) $h(t) > t$ при $t < t^*$ и $h(t) < t$ при $t > t^*$. Как и в работе [1], это условие будем называть условием A;

2) $h(t) < t$ при $t < t^*$ и $h(t) > t$ при $t > t^*$. Это условие будем называть условием B.

Выше было положено $t_0 = 0$. Введем функции $u_i(t),$ определяемые формулами

$$x_i(t) = x_i^*(t) + u_i(t),\ i = 1, 2, ..., n. \tag{14}$$

В результате такой замены система уравнений (11) принимает вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1^*(t) + u_1(t), ..., x_n^*(t) + u_n(t)) - a_i(t, x_1^*(t), ..., x_n^*(t)) +$$

$$+b_i\left(t, x_1^*(t-h(t)) + u_1(t-h(t)), ..., x_n^*(t-h(t)) + u_n(t-h(t))\right) -$$

$$-b_i\left(t, x_1^*(t-h(t)), ..., x_n^*(t-h(t))\right),\ \ i = 1, 2, ..., n; \tag{15}$$

условия (13) принимают вид

$$u_i(0) = x_0^i, i = 1, 2, ..., n, \tag{16}$$

а условия (12) можно интерпретировать как

$$u_i(t) \equiv 0,\ -\infty \le t < 0,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{17}$$

Обозначим через δ_j достаточно малое положительное число, величина которого определена ниже для каждого пространства R_n^j, и предположим, что $\| u(0) \|_j \le \delta_j$, $u(0) = (u_1(0), ..., u_n(0)),$ $j = 1, 2, 3.$ Ниже для простоты обозначений индекс j в δ_j будем опускать.

Отметим также, что в случаях, когда проводится рассуждение общее для всех пространств R_n^j, $j = 1, 2, 3,$ индексы j опускаются.

Найдем условия, при которых траектория решения задачи Коши (15)–(17) не покидает шар $B(0, \delta),$ где $\delta_1 \le \chi / 2An,$ $\delta_2 \le \chi / 2An^{3/2}$, $\delta_3 \le \chi / 4An^2$. Величина χ будет определена ниже.

Вначале рассмотрим первый случай.

Пусть $t \in [0, t^*)$. В этом промежутке времени система уравнений (15) имеет вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1^*(t) + u_1(t), ..., x_n^*(t) + u_n(t)) -$$

$$-a_i(t, x_1^*(t), ..., x_n^*(t)), \ i = 1, 2, ..., n. \tag{18}$$

Устойчивость решения задачи Коши (18), (16) исследуется методами, изложенными в введении данной статьи.

Из теоремы 2 следует, что если при $t \in [0, t^*)$

$$\Lambda_j(A(t)) < -\chi, \ \chi > 0, \ 0 \le t \le t^*, \ j = 1, 2, 3, \tag{19}$$

$\chi = \text{const}$, то траектория решения задачи Коши (15)–(17) не покидает шар $B(0, \delta_j)$, $\delta_1 \le \dfrac{\chi}{2An}$, $\delta_2 \le \dfrac{\chi}{2An^{3/2}}$, $\delta_3 \le \dfrac{\chi}{4An^2}$, в течение этого промежутка времени.

Здесь $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{ij}(t) = D^j a_i(t, x_1^i(t), \ldots, x_n^j(t))$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Из непрерывности решения $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ следует, что траектория решения задачи Коши (15)–(17) не покидает шар $B(0, \delta)$ в течение промежутка времени $[0, t^*]$.

При $t \ge t^*$ необходимо учесть влияние слагаемых, содержащих задержки.

В промежутке времени $t \in [t^*, \infty)$ система уравнений (15) имеет вид

$$\frac{du_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1^*(t) + u_1(t), ..., x_n^*(t) + u_n(t)) - a_i(t, x_1^*(t), ..., x_n^*(t)) +$$

$$+b_i\Big(t, x_1^*(t - h(t)) + u_1(t - h(t)), x_2^*(t - h(t)) + u_2(t - h(t)), ..., x_n^*(t - h(t)) +$$

$$+u_n(t - h(t))\Big) - b_i(t, x_1^*(t - h(t)), x_2^*(t), ..., x_n^*(t)), \ i = 1, 2, ..., n. \tag{20}$$

Покажем, что в случае выполнения при $t \in [t^*, \infty)$ условий

$$\Lambda_j(A(t)) + \| B(t) \|_j < -\chi, \ t \in [t^*, \infty), \ j = 1, 2, 3, \tag{21}$$

$\chi = \text{const} > 0$, траектория решения системы уравнений (20) при начальном значении

$$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)), t \in [t^* - H^*, t^*], \tag{22}$$

не покидает шар $B(0, \delta)$. Напомним, что $\| u(t) \|_j \le \delta, 0 \le t \le t^*$, $j = 1, 2, 3$.

Здесь

$$B(t) = \{b_{ij}(t)\}, \ i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$b_{ij} = D^j b_i\Big(t, x_1^*(t - h(t)), \ldots, x_n^*(t - h(t))\Big), \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени T_1, $t^* \le T_1 < \infty$, траектория решения задачи Коши (20), (22) покидает шар $B(0,\delta)$.

Представим при $t \ge T_1$ систему уравнений (20) в следующем виде:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} D^j a_i(T_1, x_1^*(T_1),...,x_n^*(T_1))u_j(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} D^j b_i\left(T_1, x_1^*(t-h(t)), x_2^*(t-h(t)),...,x_n^*(t-h(t))\right)u_j(t-h(t)) +$$

$$+g_i\left(t, u(t), u(t-h(t))\right),\ i = 1,2,3,...,n. \tag{23}$$

Структура функций $g_i(t,u(t),u(t-h(t)))$, $i = 1,2,3,...,n$, очевидна.

Систему уравнений (23) можно представить в операторном виде

$$\frac{du(t)}{dt} = A(T_1)u(t) + B(T_1)u(t-h(t)) + G\left(t, u(t), u(t-h(t))\right), \tag{24}$$

где

$$A(T_1) = \{a_{ij}(T_1)\}, B(T_1) = \{b_{ij}(T_1)\}, i, j = 1,2,...,n,$$

$$G\left(t,T,u(t),u(t-h(t))\right) = \left(g_1(t,T,u(t),u(t-h(t)),...,g_n(t,T,u(t)),u(t-h(t))\right)^T.$$

Построение вектор-функции $G\left(t,T,u(t),u(t-h(t))\right)$ очевидно.

Уравнение (24) при $t \ge T_1$ имеет решение

$$u(t) = e^{A(T_1)(t-T_1)}u(T_1) + \int_{T_1}^{t} e^{A(T_1)(t-s)}B(T_1)u(s-h(s))ds +$$

$$+\int_{T_1}^{t} e^{A(T_1)(t-s)}G\left(s,T,u(s),\, u(s-h(s))\right)ds. \tag{25}$$

Переходя к нормам, имеем

$$\| u(t) \|_j \le e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-T_1)} \| u(T_1) \|_j +$$

$$+\int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)}\left(\| B(T_1)u(s-h(s)) \|_j + \| G(s,T_1,u,h(s)) \|_j\right)ds \le$$

$$\le e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-T_1)} \| u(T_1) \|_j + \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| B(T_1)u(s-h(s)) \|_j\, ds +$$

$$+\int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| G(s,T_1,u,h(s)) \|_j \, ds =$$

$$= J_{1j}(t) + J_{2j}(t) + J_{3j}(t), \quad j = 1,2,3. \qquad (26)$$

Оценим каждое слагаемое в (26) в отдельности.

Оценка $J_{1j}(t)$ очевидна:

$$J_{1j}(t) = e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-T_1)} \| u(T_1) \|_j, \quad j = 1,2,3.$$

Для оценки $J_{2j}(t)$ необходимо предварительно оценить норму $\| B(T_1)u(s-h(s)) \|_j$ в каждом из пространств R_n^j, $j = 1,2.$

Замечание. В пространстве R_n^3 слагаемое $J_2(t)$ не оценивается, так как соответствующая оценка была получена в [1].

Так как рассуждения, проводимые в пространствах R_n^j, $j = 1,2,3,$ аналогичны, то в тех местах, где это возможно, будем проводить общие рассуждения, отмечая принадлежность оценок различным пространствам нижними индексами. Например: J_{1i}, J_{2i}, J_{3i}, $i = 1,2,3.$

Очевидно,

$$\| B(T_1)u(t-h(t)) \|_1 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left| D^j b_i\left(T_1, x_1^*(t-h(t)),\ldots,x_n^*(t-h(t))\right) u_j(t-h(t)) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \left| u_j(t-h(t)) \right| \sum_{i=1}^{n} \left| D^j b_i\left(T, x_1^*(t-h(t)),\ldots,x_n(t-h(t))\right) \right| \le$$

$$\le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left| D^j b_i\left(T_1, x_1^*(t-h(t)),\ldots,x_n^*(t-h(t))\right) \right| \| u(t-h(t)) \|_1 =$$

$$= \| B(T_1) \|_1 \| u(t-h(t)) \|_1;$$

$$\| B(T_1)u(t-h(t)) \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} | \sum_{j=1}^{n} D^j b_i(T_1, x_1^*(t-h(t)),\ldots,x_n^*(t-h(t))) u_j(t-h(t)) \|^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} | D^j b_i(T_1, x_1^*(t-h(t)),\ldots,x_n^*(t-h(t))) |^2 \sum_{j=1}^{n} | u_j(t-h(t)) |^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} | u_j(t-h(t)) |^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left| D^j b_i\left(T_1, x_1^*(t-h(t)),\ldots,x_n^*(t-h(t))\right) \right|^2 =$$

$$= \| B(T_1) \|_2^2 \| u(t-h(t)) \|_2^2 .$$

В работе [1] было показано, что

$$\| B(T)u(t-h(t)) \|_3 \le \| B(T_1) \|_3 \| u(t-h(t)) \|_3 .$$

Оценим $\| B(T_1)u(t-h(t)) \|_j$ в метрике пространств R_n^j, $j=1,2$.

Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) $T_1 = t^*$, 2) $T_1 > t^*$.

Вначале рассмотрим второй случай.

Так как $h(t) < t$ при $t > t^*$, то $t - h(t) > 0$ при $t > T_1$.

Как отмечалось выше, $\| u(t) \|_j < \delta$, $j=1,2$ при $t \in (0, T_1)$. Следовательно, существует промежуток времени $[T_1, T_1 + \Delta_2 T_1]$ такой, что $\| u(t-h(t)) \|_j < \delta$, $j=1,2$ при $t \in [T_1, T_1 + \Delta_2 T_1]$.

Так как по предположению $\| u(T_1) \|_j = \delta$, $j=1,2$, то существует промежуток времени $[T_1, T_1 + \Delta_3 T_1]$ такой, что

$$\| u(t) \|_j \ge (1-\alpha) \| u(T_1) \| = (1-\alpha)\delta, \ \ j=1,2,$$

где $\alpha > 0 -$ вещественное число.

Следовательно, в промежутке времени $[T_1, T_1 + \Delta_4 T_1]$, где $\Delta_4 T_1 = \min(\Delta_1 T_1, \dots, \Delta_3 T_1)$ справедливо неравенство

$$\| u(s-h(s)) \|_j < \| u(T_1) \|_j \le \| u(s) \|_j / (1-\alpha), \ \ j=1,2,$$

и имеет место оценка

$$J_{2j}(t) \le \| B(T_1) \|_j \frac{1}{1-\alpha} \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| u(s) \|_j \, ds, \ \ j=1,2. \qquad (27)$$

Нетрудно видеть, что α можно выбрать таким образом, что из (27) вытекает оценка

$$J_{2j}(t) \le (\| B(T_1) \|_j + \varepsilon) \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))_j(t-s)} \| u(s) \|_j \, ds, \ \ j=1,2. \qquad (28)$$

Приступим к оценке J_3.

Так как $a_{ij}(t)$, $b_{ij}\left(T_1, u(t), u(t-h(t))\right)$, $i,j=1,2,\dots,n$, – непрерывные функции, то найдется такой промежуток времени $[T_1, T_1 + \Delta_5 T_1]$, в котором

$$\| G(s, T_1, u, h(s)) \|_j \le \varepsilon \| u(s) \|_j, \ \ j=1,2. \qquad (29)$$

Из (29) следует, что

$$J_{3j}(t) \le \varepsilon \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| u(s) \|_j \, ds, \ \ j=1,2. \qquad (30)$$

Из неравенств (26)–(30) следует, что

$$\| u(t) \|_j \le e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-T_1)} \| u(T_1) \|_j +$$

$$+\left(\| B(T_1) \|_j + 2\varepsilon \right) \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| u(s) \|_j \, ds, \; j = 1,2,3.$$

Отсюда имеем

$$\| u(t) \|_j \le \exp\left\{ \left(\Lambda_j(A(T_1)) + \| B(T_1) \|_j + 2\varepsilon \right)(t - T_1) \right\} \| u(T_1) \|_j \, ds, \; j = 1,2,3. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $T_1 = t^*$. Так как $T_1 = t^*$, то $u(T_1 - h(T_1)) = u(t^* - h(t^*)) = u(0)$ и $\| u(T_1 - h(T_1)) \|_j = \| u(0) \|_j = \delta = \| u(T_1) \|_j$, $j = 1,2,3$. Следовательно, существует промежуток времени $[T_1, T_1 + \Delta T_1]$, в течение которого

$$(1 - \varepsilon_1) \| u(0) \|_j \le \| u(s) \|_j \le (1 + \varepsilon_1) \| u(0) \|_j .$$

Тогда при $t \in [T_1, T_1 + \Delta T_1]$ имеем

$$J_{2j}(t) \le \| B(T_1) \|_j \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1)))t-s)} \| u(s - h(s)) \|_j \, ds \le$$

$$\le \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \| B(T_1) \|_j \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| u(s) \|_j \, ds, \; j = 1,2,3,$$

где $\varepsilon_1 -$ как угодно малое положительное число.

Для простоты обозначений положим

$$\frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \| B(T_1) \|_j = \| B(T_1) \|_j + \varepsilon, \; j = 1,2,3.$$

Следовательно,

$$J_{2j}(t) \le \left(\| B(T_1) \|_j + \varepsilon \right) \int_{T_1}^{t} e^{\Lambda_j(A(T_1))(t-s)} \| u(s) \|_j \, ds, \; j = 1,2,3. \quad (32)$$

Аналогичным образом доказывается справедливость неравенства (30) при $T_1 = t^*$.

Из неравенств (30), (32) следует оценка

$$\| u(t) \|_j \le \exp\{ (\Lambda_j(A(T_1)) + \| B(T_1) \|_j + \varepsilon)(t - T_1) \} \| u(T_1) \|_j, \; j = 1,2,3. \quad (33)$$

Из (31), (33) следует, что эта оценка справедлива при $T_1 \in [t^*, \infty)$.

Таким образом показано, что при выполнении условий (21) траектория решения задачи (15)–(17) не покидает шар $B(0,\delta)$ в течение промежутка времени $[0,\infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $h(t)<t$ при $t\in[0,t^*)$. В этом случае при $t\in[0,t^*)$ возмущение задачи Коши (11), (13) описывается задачей Коши (15), (16). Исследование устойчивости тривиального решения проводится по аналогии с исследованием первого случая при $t>t^*$.

Таким образом, при выполнении неравенства

$$\Lambda_j(A(t))+\|B(t)\|_j\le-\chi<0, t\in[0,t^*],\quad j=1,2,3,$$

траектория решения задачи Коши (15), (16) не покидает шар $B(0,\delta)$.

Рассмотрим теперь промежуток времени $[t^*,\infty)$. В этом промежутке $h(t)>t$ и, следовательно, устойчивость решения задачи Коши (15), (16) сводится к исследованию системы (18). Это исследование было проведено выше.

Из проведенного выше анализа следует, что при выполнении неравенства

$$\Lambda_j(A(t))+\|B(t)\|_j\le-\chi<0,\ [t^*,\infty),\quad j=1,2,3, \tag{34}$$

траектория решения задачи Коши (11), (12) не покидает шар $B(x^*,\delta)$.

Остановимся на вопросе об асимптотической устойчивости.

Выше было показано, что вопрос об устойчивости решения задачи Коши (11), (12) сводится к исследованию устойчивости системы уравнений (23).

Объединяя проведенное выше исследование и выкладки, проведенные в работах [1–3], можно показать, что при выполнении условий (34) справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_j\le\exp\{(\Lambda_j(A(t))+\|B(t)\|_j)/2\}\|u(0)\|_j,\quad j=1,2,3.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) задача Коши (11), (12) имеет установившееся решение $x^*(t)$;

2) функции $a_i(t,v_1,\ldots,v_n)$, $b_i(t,v_1,\ldots,v_n)$ непрерывны в шаре $B(x^*(t),r)$, $r>0$;

3) функция $h(t)$ непрерывна при $t\in[0,\infty)$;

4) выполнено неравенство (34) при $j=1,2,3$.

Тогда установившееся решение $x^*(t)$ асимптотически устойчиво в метрике пространства R_n^j, $j=1,2,3$.

Из этой теоремы непосредственно следует утверждение об асимптотической устойчивости установившегося решения $x^*(t)$ задачи Коши (11), (12) в предположении, что уравнение $h(t)=t$ имеет конечное число решений при $t\in[0,\infty)$.

В случае, если уравнение $h(t) = t$ имеет счетное множество различных корней, то для доказательства асимптотической устойчивости решения задачи Коши (11)–(12) приходится ввести дополнительное условие.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1–4 теоремы 3 и пусть, кроме того, выполнены условия:

5) уравнение $h(t) = t$ имеет счетное множество корней $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \ldots$; $\zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_n < \cdots$;

6) справедливы неравенства $\zeta_{k+1} - \zeta_k \geq H > 0$.

Тогда установившееся решение задачи Коши (11)–(12) асимптотически устойчиво.

Доказательство является объединением доказательств предыдущей теоремы и теоремы 3 работы [3].

Замечание. Аналогичные утверждения имеют место и в случае возмущения вектор-функции $\eta(t) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$ вектор-функцией $\tilde{\eta}(t) = (\tilde{\eta}_1(t), \ldots, \tilde{\eta}_n(t))$.

Замечание. Случай кратных корней не рассматривается, так как все рассуждения проводятся по аналогии с предыдущими.

Заключение

В работе получены достаточные условия устойчивости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Условия представлены в виде систем неравенств, связывающих коэффициенты исходных уравнений.

Библиографический список

1. **Бойков, И. В.** Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 435–457.
2. **Бойков, И. В.** Достаточные условия устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Часть I. Линейные уравнения / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 4 (48). – С. 3–19.
3. **Бойков, И. В.** Достаточные условия устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Часть II. Линейные уравнения / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 1 (49). – С. 63–77.
4. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1970. – 536 с.
5. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – Москва : Мир, 1988. – 335 с.
6. **Бойков, И. В.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений : монография / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.

References

1. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2018, vol. 54, no. 4, pp. 435–457. [In Russian]

2. Boykov I. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 4 (48), pp. 3–19. [In Russian]
3. Boykov I. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 1 (49), pp. 63–77. [In Russian]
4. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in the Banach space]. Moscow: Nauka, 1970, 536 p. [In Russian]
5. Dekker K., Verver Ya. *Ustoychivost' metodov Runge – Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988, 335 p. [In Russian]
6. Boykov I. V. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy: monografiya* [Stability of solutions of differential equations: monograph]. Penza: Izd-vo PGU, 2008, 244 p. [In Russian]

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Образец цитирования:

Бойков, И. В. Достаточные условия устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Часть. III. Нелинейные уравнения / И. В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 2 (50). – С. 3–20. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-2-1.